# TERMRECHNEN & GLEICHUNGEN

Die Schulbücher von Dr. Karl Rosenberg (1861-1936) wurden bis in die sechziger Jahre in Österreich verwendet. Damit wir uns hier bitte richtig verstehen: das war auch vor meiner Zeit. Ich erlebe aber nicht selten, wie KollegInnen die Augen nass werden, wenn sie bei mir „einen Rosenberg“ liegen sehen.

Wir haben eine Gruppe angehender Mathematik-Lehrpersonen gebeten, die gemeinfrei gewordenen Bücher von Karl Rosenberg nach Aufgaben zu durchkämmen, auf die sie in ihrem Unterricht nicht verzichten wollen würden. Aus ihren Vorschlägen ist der erste Entwurf dieser Sammlung entstanden.

Dass viele dieser und ähnlicher Aufgaben aus dem Matura-Kanon verschwunden sind, liegt wohl daran, dass wir beim besten Willen keinen Kontext für sie finden, der nicht ganz an den Haaren herbeigezogen ist. Sie sind als Rechenübungen konstruiert und erfüllen diesen Zweck hervorragend.

*Warum rechnen?*

Wir erleben, dass Studierende immer weniger Rechenfertigkeit aus der Schule an die Universität mitbringen. In einer Prüfung soll die ansprechende Summenformel

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

mit *vollständiger Induktion* (übrigens eine tolle Sache) bewiesen werden. Dabei ist es wichtig, den Term $(n+1)^3$ effizient auszumultiplizieren. Genau daran scheitern viele. Das ist sehr bitter für alle.

Mathematik geschieht, wenn Sie viele kleine Schritte mühelos zu etwas Eigenem aneinandersetzen.

Die vorliegende Sammlung ist recht umfangreich. Beginnen Sie unbedingt mit Aufgaben, die Ihnen sympathisch und vertraut sind. Die mit ☆ gekennzeichneten Aufgaben finden wir besonders knifflig.

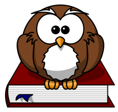
Wir wünschen Ihnen viele schöne Anfänge im Rahmen Ihres Studienbeginns.
Wir freuen uns, dass wir Sie ein Stück weit begleiten dürfen.

*Univ.-Prof. Dr. Michael Eichmair*

*Datum:* 5. Oktober 2018.

INHALTSVERZEICHNIS





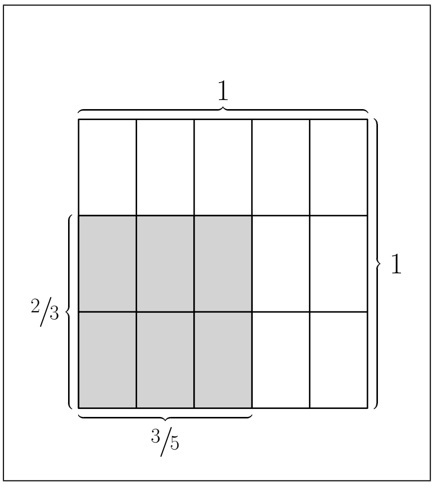
## 1. Grundrechenarten und Bruchrechnung

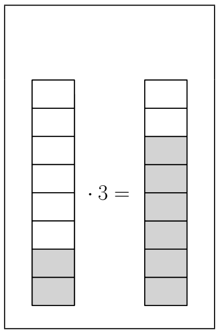
**1.1.** Wer erinnert sich an Turmrechnen?

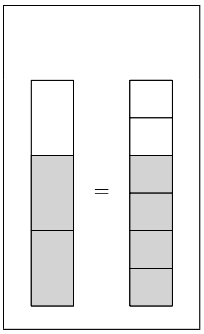
i) $42 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)$ ii) $\dfrac{15240960}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}$ iii) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13$

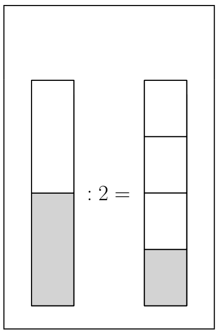
**1.2.** In den 7 Bildern sind Rechenoperationen mit Brüchen veranschaulicht.
Die Zerlegung der Flächen erfolgt jeweils in gleich große Teile.
Ordne die 7 Rechenoperationen den Bildern zu und schreibe jeweils die dargestellte Rechnung an.

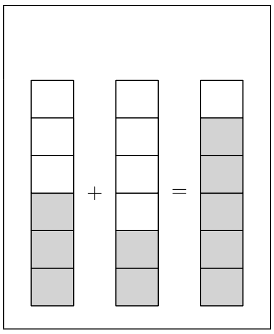
i) Bruch kürzen
ii) Bruch erweitern
iii) Bruch mit Bruch multiplizieren
iv) Brüche addieren
v) Brüche subtrahieren
vi) Bruch mit natürlicher Zahl multiplizieren
vii) Bruch durch natürliche Zahl dividieren

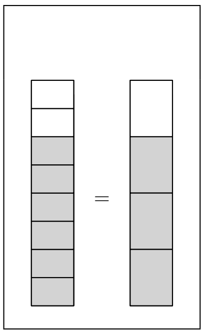


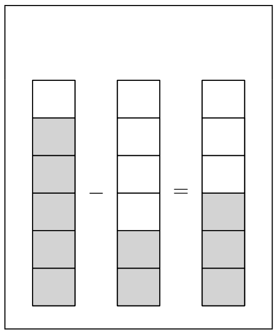



**1.3.** Schreibe Zähler und Nenner jeweils als Produkt von Primzahlen und kürze so weit wie möglich.

i) $\dfrac{252}{1890}$ ii) $\dfrac{36}{1080}$ iii) $\dfrac{4200}{13\,230}$ iv) $\dfrac{1225}{6300}$ v) $\dfrac{550}{66}$ vi) $\dfrac{2700}{135}$

**1.4.** Stelle das Ergebnis als gekürzten Bruch dar.

i) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}$ ii) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{4}{9}$ iii) $\dfrac{5}{24}+\dfrac{4}{45}$ iv) $4+\dfrac{2}{3}$ v) $\dfrac{7}{12}-\dfrac{3}{10}$ vi) $\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{15}$ vii) $\dfrac{42}{25}-2$

**1.5.** Stelle das Ergebnis als gekürzten Bruch dar.

i) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{4}{9}-\dfrac{3}{18}$ ii) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{8}$

**1.6.** Stelle das Ergebnis als gekürzten Bruch dar.

i) $3+\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{3}-\left(\dfrac{7}{9}-\dfrac{11}{15}\right)$ ii) $5-\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)-\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{11}{12}\right)$

**1.7.** Stelle das Ergebnis als gekürzten Bruch dar.

i) $\dfrac{2}{7}\cdot 4$ ii) $\dfrac{2}{7}:2$ iii) $\dfrac{2}{7}:3$ iv) $\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{15}{2}$ v) $-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{7}{6}$ vi) $\dfrac{1}{9}\cdot\left(-\dfrac{15}{11}\right)$ vii) $-\dfrac{5}{4}:\left(-\dfrac{15}{6}\right)$

**1.8.** Stelle das Ergebnis als gekürzten Bruch dar.

i) $\dfrac{4}{5}:\dfrac{1}{2}-\left(2\cdot\dfrac{3}{15}+\dfrac{3}{10}\right)$ ii) $\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{3}\cdot\left(2-\dfrac{7}{2}\right)$ iii) $\dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{5}{3}-\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\right]$

**1.9.** Stelle das Ergebnis als gekürzten Bruch dar.

i) $\dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}}$ ii) $\dfrac{\frac{7}{2}}{3}$ iii) $\dfrac{5}{\frac{2}{3}}$ iv) $\dfrac{3-\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}}$ v) $\dfrac{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}$

**1.10.** Berechne $(2\cdot 3)\cdot 4$ und $2\cdot(3\cdot 4)$ und vergleiche. Berechne nun $(2\div 3)\div 4$ und $2\div(3\div 4)$.

Die Schreibweise $2\cdot 3\cdot 4$ ist unbedenklich – wir können nämlich rechnen, wie wir wollen. Der Ausdruck $2\div 3\div 4$ ist brandgefährlich.

**1.11.** Stelle das Ergebnis als gekürzten Bruch dar.

i) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}$ ii) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}$ iii) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}$

iv) Wie wohl sieht die folgende Zahl als gekürzter Bruch aus?

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\dots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}$$

Versuche deine Vermutung zu beweisen. Tipp: $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{(n+1)-n}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

**1.12.** Stelle die folgende Zahl als gekürzten Bruch dar.

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\dots\dots+\frac{1}{97\cdot 98\cdot 99}+\frac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$$

**1.13.** Das Produkt der irrationalen Zahlen $\pi$ und $e$ wird durch das Produkt der rationalen Zahlen 3,1415 und 2,7182 angenähert. Erkläre anschaulich mit Rechtecksflächen, weshalb der Fehler dabei kleiner als $7\cdot 10^{-4}$ sein muss. Zeige ohne Taschenrechner, dass sich $\pi/e$ und $3{,}1415/2{,}7182$ um weniger als $10^{-4}$ voneinander unterscheiden.

## 2. Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

**2.1.** Schaffst du die folgenden Rechnungen auch ohne Taschenrechner?

i) $6^3 \cdot 5^3$

ii) $25^3 \cdot 4^6 \cdot 250^2$

iii) $\dfrac{84^3 \cdot 12 \cdot 2^4}{4^3 \cdot 6^3 \cdot 14^2}$

iv) $\dfrac{25^{75} \cdot 4^{120}}{125^{51} \cdot 2^{241}}$

v) $\dfrac{22^3 \cdot 35^3}{55^4 \cdot 14^3}$

vi) $(-1)^{2019}$

**2.2.** Vereinfache so weit wie möglich.

i) $(a^{32} \cdot a^{16} \cdot a^8 \cdot a^4 \cdot a^2 \cdot a) \cdot a$

ii) $\dfrac{(5 \cdot x^2 \cdot y^3)^{-1}}{(25 \cdot x^{-2} \cdot y^4)^{-2}}$

iii) $2 \cdot \dfrac{3 \cdot a^{-2} \cdot b^4}{12 \cdot a^{-2} \cdot b^{-4}}$

iv) $\dfrac{2 \cdot (m^2 \cdot n^5)^{-1}}{m^{-3} \cdot n^6}$

v) $(a \cdot \sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{a} \cdot \sqrt[16]{a} \cdot \sqrt[32]{a}) \cdot \sqrt[32]{a}$

vi) $\sqrt[6]{(((2 \cdot m \cdot n)^{-3})^{-1})^{-2}}$

vii) $\sqrt[4]{9^2 \cdot (x^2 \cdot y^{-12})^2}$

viii) $\left(x^{-3/2} \cdot y^{6/5}\right)^{10/3}$

**2.3.** Vereinfache so weit wie möglich.

i) $(x - x^{2-a}) \cdot (x^a + x)$  ii) $\dfrac{(m^2+n^2)^2}{(m^2-n^2)^2 + (2 \cdot m \cdot n)^2}$

**2.4.** Vereinfache so weit wie möglich.

i) $2 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{45} - 4 \cdot \sqrt{20}$  ii) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{50} + 7 \cdot \sqrt{2})}{(5 \cdot \sqrt{48} - 8 \cdot \sqrt{27}) \cdot \sqrt{2}}$

**2.5.** Multipliziere aus und stelle das Ergebnis übersichtlich dar.

i) $(1+x) \cdot (1-x)$  ii) $(1+x+x^2) \cdot (1-x)$  iii) $(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) \cdot (1-x)$

**2.6** (Geometrische Summenformel)**.** Zeige: Für jede Zahl $q \neq 1$ ist

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

**2.7.** Multipliziere aus und stelle das Ergebnis übersichtlich dar.

i) $(x-a) \cdot (x+a)$

ii) $(x-a) \cdot (x^2 + a \cdot x + a^2)$

iii) $(x-a) \cdot (x^n + a \cdot x^{n-1} + a^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a^{n-2} \cdot x^2 + a^{n-1} \cdot x + a^n)$

**2.8.** Multipliziere aus und stelle das Ergebnis übersichtlich dar.

i) $(1+x+x^2)\cdot(1-x+x^2)$

ii) $(1+x+x^2+x^3+x^4)\cdot(1-x+x^2-x^3+x^4)$

iii) $(1+x)^5+(1-x)^5$

**2.9.** Multipliziere aus und stelle das Ergebnis übersichtlich dar.

i) $(x^2+1)\cdot(x^4+1)$

ii) $(x^2+1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)$

iii) $(x^2+1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)\cdot(x^{16}+1)$

iv) ☆ $(x^2+1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)\cdot\ldots\cdot(x^{512}+1)\cdot(x^{1024}+1)$

**2.10.** ☆ Finde eine bequeme Formel, mit der du den Ausdruck

$$s=1+2\cdot x+3\cdot x^2+\ldots+m\cdot x^{m-1}$$

für beliebige Werte von $x$ und z.B. $m=100$ berechnen kannst. Tipp: Berechne $s\cdot(1-x)$.

**2.11.** Schreibe als gekürzten Bruch.

i) $(1-3+3^2-3^3+3^4-3^5+3^6-3^7+3^8-3^9)/(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+3^9)$

ii) ☆ $(x^6-y^6)/\sqrt{5}$, wobei $x=(1+\sqrt{5})/2$ und $y=(1-\sqrt{5})/2$. Ist $(x^{37}-y^{37})/\sqrt{5}$ eine rationale Zahl?

**2.12.** Kürze die folgenden Ausdrücke.

i) $\dfrac{x^6-y^6}{x^3+y^3}$

ii) $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$

iii) $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}$

iv) $\dfrac{x^4-y^4}{x-y}$

v) $\dfrac{x^4-y^4}{x+y}$

vi) $\dfrac{x^5-y^5}{x-y}$

vii) $\dfrac{x^5+y^5}{x+y}$

viii) $\dfrac{x^6-y^6}{x-y}$

ix) $\dfrac{x^6-y^6}{x^2-y^2}$

**2.13.** Vereinfache den Ausdruck.

i) $\left(\sqrt{a/b}+\sqrt{b/a}\right)^2-\left(\sqrt{a/b}-\sqrt{b/a}\right)^2$

ii) $\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$

iii) $\left(\sqrt{n+2\cdot\sqrt{n-1}}+\sqrt{n-2\cdot\sqrt{n-1}}\right)^2$

iv) $\left(\sqrt{u+\sqrt{v}}-\sqrt{u-\sqrt{v}}\right)^2$

**2.14.** Vereinfache den Ausdruck. Tipp: Quadriere aufs Geratewohl.

i) $\sqrt{7+2\cdot\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\cdot\sqrt{10}}$ iii) $\sqrt{7\cdot\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{6}}+\sqrt{7\cdot\sqrt{2}-4\cdot\sqrt{6}}$

ii) $\sqrt{8-2\cdot\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\cdot\sqrt{7}}$ iv) $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$

**2.15.** Es ist $x_1=-p/2+\sqrt{(p/2)^2-q}$ und $x_2=-p/2-\sqrt{(p/2)^2-q}$.

Berechne und vereinfache: i) $x_1+x_2$ ii) $x_1\cdot x_2$ iii) $(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

**2.16.** In dieser Aufgabe ist $\log=\log_a$ für irgendein $a>0$. Zerlege so weit wie möglich.

i) $\log\left(x^2\cdot y^3\cdot\sqrt{z}\right)$ ii) $\log\left(\frac{x+y}{z^2}\right)$ iii) $\log\left(\sqrt[5]{\frac{x^3\cdot z^2}{y}}\right)$ iv) $\log\left(\frac{x^2-y^2}{\sqrt[3]{a^z}}\right)$

**2.17.** In dieser Aufgabe ist $\log=\log_a$ für irgendein $a>0$.
Schreibe den gegebenen Ausdruck als Logarithmus eines möglichst einfachen Terms.

i) $5\cdot\log(x)-2\cdot\log(y)+\log\left(\frac{z}{2}\right)$ ii) $3\cdot[\log(5\cdot x)+\log(x^3)]$ iii) $\log(x)-\log\left(\frac{1}{x}\right)+42$

**2.18.** Für welche reellen Zahlen $x>0$ gelten die Ungleichungen? Hinweis: $\lg=\log_{10}$

i) $1\le\lg x<2$ ii) $3\le\lg x<5$ iii) $-3<\lg x\le 2$ iv) $-1/2<\log_{1/4}x<2$

**2.19.** Wie viele Stellen hat die Zahl (TR erlaubt)? i) $1000^{\left(100^{10}\right)}$ ii) $\left(1000^{100}\right)^{10}$ iii) $2018^{2018}$

**2.20.** Ordne die Zahlen der Größe nach: 2, 3, $\log_2(3)$, $3/2$, $\log_3(2)$, $\sqrt{3}$. Tipp: Gib $\frac{8}{5}$ zur Liste dazu.

**2.21.** Begründe jeden Schritt in der folgenden Gleichungskette:

$$3^{\log_3(4)\cdot\log_4(3)}=\left(3^{\log_3(4)}\right)^{\log_4(3)}=4^{\log_4(3)}=3.$$

Was also ist $\log_3(4)\cdot\log_4(3)$?
Ob das ein Zufall ist? Stelle eine allgemeine Vermutung auf und beweise sie.

**2.22.** Stelle die komplexe Zahl in der Form $a+b\cdot i$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ dar.

i) $\frac{1}{2}\cdot(3-2\cdot i)+\frac{i+1}{3}$ ii) $\frac{1}{i}$ iii) $\frac{(3-2\cdot i)\cdot(i-2)}{(2-i)\cdot(1+i)}$ iv) $\frac{2-i}{1+3\cdot i}+\frac{2-i}{1+i}$ v) $i^{2019}$

**2.23.** In dieser Aufgabe ist $w=1-i$ und $z=3+4\cdot i$. Stelle die gegebene komplexe Zahl in der Gaußschen Zahlenebene dar und beschreibe dann ihren geometrischen Zusammenhang mit $w$ und $z$.

i) $w+z$ ii) $w\cdot z$ iii) $-z$ iv) $\overline{z}$ v) $i\cdot z$ vi) $\frac{z}{w}$ vii) $\frac{1}{w}$ viii) $\frac{1}{\overline{w}}$

## 3. Quadratische Polynome

Wir erinnern mit einem Beispiel an die Methode des *quadratischen Ergänzens*. Schau genau zu:

$$x^2 - 6 \cdot x - 16 = \underbrace{x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 9}_{=(x-3)^2} - 9 - 16 = (x-3)^2 - 25.$$

Die quadratische Polynomfunktion $f$ mit

$$f(x) = x^2 - 6 \cdot x - 16$$

nimmt also ihren *kleinsten* Wert an der Stelle $x_S = 3$ an. Dieser kleinste Wert beträgt $y_S = -25$.

Siehst du auch, weshalb das so ist?

Wir interessieren uns auch für die Nullstellen der Funktion.

$$f(x) = 0 \quad\iff\quad (x-3)^2 = 25 \quad\iff\quad x - 3 = \pm\sqrt{25} \quad\iff\quad x = 3 \pm 5$$

Die Nullstellen von $f$ liegen also bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 8$.

Schauen wir uns noch ein zweites Beispiel an.

$$-6 \cdot x^2 + x + 1 = -6 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{6} \cdot x\right) + 1 = -6 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot x + \frac{1}{144}\right) + \frac{1}{24} + 1 =$$
$$= -6 \cdot \left(x - \frac{1}{12}\right)^2 + \frac{25}{24}.$$

Die quadratische Polynomfunktion $g$ mit

$$g(x) = -6 \cdot x^2 + x - 1$$

nimmt also ihren *größten* Wert $y_S = 25/24$ an der Stelle $x_S = 1/12$ an.
Der Scheitelpunkt ist also $S(1/12 \mid 25/24)$
Die Nullstellen liegen bei $x_1 = -1/3$ und $x_2 = 1/2$.

Auf die gleiche Weise können wir mit quadratischer Ergänzung jedes quadratische Polynom in die *Scheitelpunktform* bringen:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \quad \text{mit} \quad x_S = -\frac{b}{2 \cdot a} \quad \text{und} \quad y_S = c - \frac{b^2}{4 \cdot a}.$$

Diese Scheitelpunktform ist nun wirklich eine tolle Sache. Sowohl Extremstelle und Extremwert als auch die Nullstellen einer quadratischen Polynomfunktion lassen sich leicht aus dieser Darstellung gewinnen. *Profis ergänzen quadratisch.*

Die Aufgaben in diesem Abschnitt lassen sich mit der Scheitelpunktform lösen.

**3.1.** Ermittle die Extremstelle, den Extremwert sowie die Nullstellen der Polynomfunktion.

i) $x \mapsto x^2 - 15 \cdot x + 26$ iii) $x \mapsto 12 \cdot x^2 - x - 1$ v) $x \mapsto 2 \cdot x^2 + 11 \cdot x + 12$

ii) $x \mapsto x^2 + 3 \cdot x - 18$ iv) $x \mapsto -4 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 9$ vi) $x \mapsto 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 4$

**3.2.** Für welche Werte von $k$ hat die gegebene Gleichung genau eine reelle Lösung?

i) $x^2 + 2 \cdot k \cdot x - (10 \cdot k + 9) = 0$ ii) $4 \cdot x^2 = (2 \cdot k \cdot x - 12)^2 + 3$

**3.3.** Stelle das quadratische Polynom $x^2 + p \cdot x + q$ in Scheitelpunktform dar. Leite daraus die *Kleine Lösungsformel* für die quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ mit Koeffizienten $p, q \in \mathbb{R}$ her.

**3.4.** Wir nehmen zwei reelle Zahlen mit Summe 10 und bilden ihr Produkt. Was ist das größte Produkt, das man auf diese Weise bilden kann?

**3.5.** Wir schreiben einem rechtwinkeligen Dreieck mit Katheten der Länge $a$ und $b$ Rechtecke mit Seiten parallel zu den Katheten ein. Was ist die größte Fläche, die ein solches Rechteck haben kann?

**3.6.** Wir schreiben einem Halbkreis mit Radius $r > 0$ Rechtecke ein, sodass eine Seite auf dem Durchmesser zu liegen kommt. Was ist die größte Fläche, die ein solches Rechteck haben kann?

**3.7.** Der Punkt $(-2 \mid 4)$ liegt auf der Parabel $y = x^2$. In wie vielen Punkten schneidet die Gerade durch den Punkt $(-2 \mid 4)$ und mit Steigung $k$ die Parabel? Interpretiere dein Ergebnis auch geometrisch.

**3.8.** Wir suchen nach jenem Punkt der Ebene, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu den drei Punkten $A = (1 \mid -4)$, $B = (2 \mid -7)$ und $C = (3 \mid 5)$ so klein wie möglich ist.

**3.9** (Berührbedingungen)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$. Zeige, dass sich die Gerade mit Gleichung $y = k \cdot x + d$ und die Ellipse mit Gleichung $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ genau dann in genau einem Punkt schneiden, wenn $a^2 \cdot k^2 + b^2 = d^2$ gilt.

## 4. Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

**4.1.** Löse die folgenden Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

i) $\frac{x}{6} + \frac{3 \cdot x}{4} = 2 \cdot x + 1$ ii) $4 \cdot (x - 2) - 3 \cdot x = \frac{x}{5}$ iii) $2 \cdot \frac{x}{3} = x - \frac{x}{3}$

**4.2.** Für welche Werte von $a$ und $b$ hat das gegebene Gleichungssystem genau eine reelle Lösung? Gib jeweils alle möglichen Werte für $a$ und $b$ an.

i) $\begin{cases} 3 \cdot x + a \cdot y = 7 \\ -5 \cdot x - 6 \cdot y = b \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 3 \cdot x + 2 \cdot y = 18 \\ a \cdot x + b \cdot y = 30 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} a \cdot x + 5 \cdot y = 40 \\ b \cdot x - 2 \cdot y = 12 \end{cases}$

**4.3.** Für welche reellen Werte von $a$ und $b$ hat das gegebene Gleichungssystem
**1)** keine reelle Lösung? **2)** genau eine reelle Lösung? **3)** unendlich viele reelle Lösungen?
Gib jeweils alle möglichen Werte für $a$ und $b$ an.

i) $\begin{cases} 3\cdot x - 4\cdot y = 5 \\ a\cdot x + 16\cdot y = b \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 4\cdot x + a\cdot y = 15 \\ 3\cdot x + 2\cdot y = b \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 10\cdot x + a\cdot y = 18 \\ b\cdot x + 4\cdot y = 12 \end{cases}$

**4.4.** ☆ Löse die folgenden Gleichungssysteme.

i) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 6 \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 8 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x - y - z = 2\cdot a \\ x + y - z = 2\cdot b \\ x - y + z = 2\cdot c \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 21 \\ x + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 15 \\ x + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 12 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} \frac{x+3}{y-3} = 1 \\ \frac{y+2}{z-2} = 2 \\ \frac{z+1}{x-1} = 3 \end{cases}$

**4.5.** Löse die folgenden Gleichungssysteme.

i) $\begin{cases} 3\cdot x - 5\cdot y = 2 \\ -4\cdot x + 3\cdot y = -10 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} -x + 7\cdot y = 12 \\ 2\cdot x + 5\cdot y = -5 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 2\cdot x - 3\cdot y = 5 \\ -4\cdot x + 6\cdot y = -10 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} -4\cdot x + y = 3 \\ 8\cdot x - 2\cdot y = 5 \end{cases}$

## 5. Bruchterme und Bruchgleichungen

**5.1.** Kürze die Bruchterme soweit wie möglich.

i) $\dfrac{54\cdot a^3\cdot b^5\cdot c^3}{24\cdot b^2\cdot c^7\cdot d^5}$ ii) $\dfrac{21\cdot f^3\cdot g^2\cdot (2\cdot k - 3\cdot m)}{56\cdot f^4\cdot g\cdot (3\cdot m - 2\cdot k)}$ iii) $\dfrac{35\cdot p^2\cdot q^2 + 49\cdot p\cdot q^3}{70\cdot p\cdot q + 98\cdot q^2}$

**5.2.** Vereinfache so weit wie möglich.

i) $\dfrac{3\cdot x}{10} + \dfrac{5}{7}\cdot x - 3\cdot\dfrac{x}{35} + \dfrac{x}{14}$ ii) $\dfrac{a+1}{4} + \dfrac{2+3\cdot a}{12} - \dfrac{1-a}{8} - \dfrac{2\cdot a - 5}{6}$ iii) $\dfrac{y}{5} + 3 - y + \dfrac{2\cdot y}{3} - \dfrac{1-y}{15}$

**5.3.** Vereinfache so weit wie möglich.

i) $\dfrac{2\cdot y - 1}{y-2} - \dfrac{3\cdot y}{y^2-4}$ ii) $\dfrac{x+5}{2\cdot x+3} - \dfrac{x+4}{2\cdot x - 3} + \dfrac{21}{4\cdot x^2 - 9}$ iii) $\dfrac{4\cdot n^2 + 16}{n^4 - 16} - \dfrac{n}{n+2} + 1$

**5.4.** Vereinfache so weit wie möglich.

i) $\dfrac{\frac{c}{d} - \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} + 2 + \frac{d}{c}}$ iii) $\dfrac{\frac{2\cdot x}{y} - 1}{\frac{2\cdot x}{y} + 1}\cdot\dfrac{4\cdot x^2 + 4\cdot x\cdot y + y^2}{4\cdot x^2 - 4\cdot x\cdot y + y^2}$

ii) $\left(\dfrac{5\cdot r^4}{3\cdot t^2} - \dfrac{3\cdot t^2}{5}\right) : \left(\dfrac{r^2}{3\cdot t} - \dfrac{t}{5}\right)$ iv) $\dfrac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}\cdot\dfrac{a-b}{b}$

**5.5.** Löse die Formel $\dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = d$ nach $a$ auf. $(a, b, c, d > 0)$

**5.6.** Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

i) $x - \dfrac{36}{x} = 5$

ii) $\dfrac{4}{5 \cdot x} + \dfrac{1}{3 \cdot x} - \dfrac{5}{6 \cdot x} = \dfrac{1}{10}$

iii) $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{x} + 1$

iv) $\dfrac{2}{3 \cdot y + 9} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{y+2}{5 \cdot y - 15} - \dfrac{7}{15}$

v) $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{3}{z+1} - \dfrac{2}{z+2}$

vi) $\dfrac{1 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{2 \cdot x}} = \dfrac{\frac{x}{4} - \frac{1}{36}}{\frac{x}{9}}$

vii) $\dfrac{x}{1 + \frac{2}{3+x}} = 4 + x$

viii) $\dfrac{2 \cdot x - 3}{2 \cdot x + 3} + \dfrac{2 \cdot x + 3}{2 \cdot x - 3} = \dfrac{50}{4 \cdot x^2 - 9}$

ix) $\dfrac{4 - 5 \cdot x}{x+1} + \dfrac{x^2 + 8 \cdot x}{x^2 - 1} = \dfrac{3 + 4 \cdot x}{1 - x} + \dfrac{17}{1 - x^2}$

x) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{5}{x^2 + x} = 1 + \dfrac{1}{x}$

**5.7.** Welchen Ausdruck muss man vom Zähler und vom Nenner eines allgemeinen Bruches subtrahieren, um den Kehrwert dieses Bruches zu erhalten?

**5.8.** Welchen Ausdruck muss man vom Zähler und vom Nenner eines allgemeinen Bruches subtrahieren, um den negativen Wert dieses Bruches zu erhalten? Für welche Zahl gibt es keinen solchen Ausdruck?

**5.9.** Gibt es eine Zahl, die die folgende Bedingung erfüllt? „Vermehrt man den Zähler von $\frac{5}{7}$ um diese Zahl und vermindert gleichzeitig den Nenner um dieselbe Zahl, so erhält man 2."

**5.10.** Gibt es eine Zahl, die die folgende Bedingung erfüllt? „Der Kehrwert der um 1 vermehrten Zahl ist gleich dem um 1 vermehrten Kehrwert der Zahl."

## 6. Exponential- und Logarithmusgleichungen

**6.1.** Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$. Hinweis: $\lg = \log_{10}$

i) $\dfrac{1 + \lg(x/4)}{3} = 2$ ii) $2^{x^2 - 2 \cdot x - 5} - 8 = 0$ iii) $\lg(x) + \lg(10 \cdot x) + \lg(100 \cdot x) = -3$

**6.2.** Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

i) $2^x \cdot 5^{x-1} = 2000$

ii) $5^{4 \cdot x - 5} \cdot 4^{\frac{3+x}{2}} = 5^{2 \cdot x + 1} \cdot 2^{2 \cdot x}$

iii) $9 \cdot 4^{x-3} - 9^{x-3} = 2^{2 \cdot x - 3}$

iv) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2}$

**6.3.** Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

i) $\lg(x-8)+\lg(x-6)=\lg(3)$

ii) $\lg[(2\cdot x-1)^2]+\lg[(4\cdot x-3)^2]=2$

iii) $\lg(2\cdot x)=2\cdot\lg(3\cdot x-8)$

iv) $\dfrac{1}{4-\lg(x)}+\dfrac{2}{2+\lg(x)}=1$

v) $[\lg(x)]^2-\lg(x)-6=0$

vi) $\lg[(5\cdot x-5)^2]=1+\lg(2\cdot x-2)$

**6.4.** ☆ Löse die Gleichung über der Grundmenge der positiven reellen Zahlen.

i) $x^{2+4\cdot\lg(x)}=100$ ii) $\log_x(4)-2\cdot\log_4(x)=1$
iii) $({}^{x}/_{3})^{3+\lg(x)}=30\,000$ [1, 2440]

## 7. Wurzelgleichungen

Beachte beim Lösen von Wurzelgleichungen, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist. Nach dem Quadrieren kann eine Gleichung nämlich mehr Lösungen als zuvor haben.

Welche Lösungen haben zum Beispiel die Gleichung $x=1$ und die quadrierte Gleichung $x^2=1$?

Die Lösungen der quadrierten Gleichung sind zunächst einmal nur *Lösungskandidaten*. Um die tatsächlichen Lösungen der ursprünglichen Gleichung von bloßen *Scheinlösungen* zu trennen führen wir eine Probe durch.

**7.1.** Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

i) $x+10\cdot\sqrt{x}-24=0$ ii) $\sqrt{2\cdot x-5}-\dfrac{25}{\sqrt{2\cdot x-5}}+24=0$

**7.2.** Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

i) $\sqrt{2\cdot x+6}+\sqrt{3-2\cdot x}=3$

ii) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}=\sqrt{2\cdot x+19}$

iii) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x+3}$

iv) $\sqrt{x+24}+\sqrt{x-8}=\sqrt{x+34}$

**7.3.** ☆ Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

i) $\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2$ [1, 2250]

ii) $\sqrt{\dfrac{4-x}{x+3}}+\sqrt{\dfrac{x+3}{4-x}}=\dfrac{5}{2}$

iii) $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}}=5 \quad (a>b>0)$

## 8. Weitere nichtlineare Gleichungen und Gleichungssysteme

**8.1.** Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$x \cdot (2 \cdot x + 14) \cdot (x^2 + 8 \cdot x + 15) = 0$$

**8.2.** Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

i) $x^2 - 4 \cdot x = 0$
ii) $x^3 - 4 \cdot x = 0$
iii) $x^3 + 4 \cdot x = 0$
iv) $x^3 + 4 \cdot x^2 = 0$
v) $x^4 - 4 \cdot x^2 = 0$
vi) $x^4 + 4 \cdot x^2 = 0$

**8.3.** Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

i) $x^4 - 13 \cdot x^2 + 36 = 0$
ii) $3 \cdot x^4 - 17 \cdot x^2 - 28 = 0$
iii) $x^6 + 28 \cdot x^3 + 27 = 0$
iv) $x^8 - 25 \cdot x^4 + 144 = 0$
v) $x^2 - \dfrac{144}{x^2} = 7$
vi) $x^2 - 2 \cdot x - \left(\dfrac{15}{x-1}\right)^2 = 15$

**8.4.** Ermittle die Null- und Extremstellen der zugehörigen Polynomfunktion.

i) $x^4 - 8 \cdot x^2 + 7$
ii) $-x^4 + 6 \cdot x^2 + 27$
iii) $x^4 + 2 \cdot x^2 + 2$
iv) $x^6 - 26 \cdot x^3 - 27$.

Zum Beispiel ist $x^4 - 8 \cdot x^2 + 7 = (x^4 - 2 \cdot 4 \cdot x^2 + 16) - 16 + 7 = (x^2 - 4)^2 - 9$.

**8.5.** Zeige, dass die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für welche Werte von $x$ gilt Gleichheit?

i) $-1 \leq 4 \cdot \sin^2 x - 4 \cdot \sin x$
ii) $4 \cdot \sin^2 x - 4 \cdot \sin x \leq 8$
iii) $\dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 4 \cdot x + 13}} \leq 1$

**8.6.** Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

i) $x^3 - 2 \cdot x^2 + 27 \cdot (2 - x) = 6 \cdot x \cdot (x - 2)$

ii) $x^2 \cdot (x - 6)^2 - 2 \cdot x \cdot (x - 6) - 35 = 0$

iii) $3 \cdot (x^2 - 8 \cdot x + 21) = (x^2 - 8 \cdot x) \cdot (x^2 - 8 \cdot x + 1)$

**8.7.** Zerlege in Linearfaktoren. Tipp: Suche nach ganzzahligen Nullstellen.

i) $x^2 - 3 \cdot x + 2$
ii) $x^2 + 96 \cdot x - 97$
iii) $x^2 - 6 \cdot x - 91$
iv) $x^4 - 10 \cdot x^3 + 35 \cdot x^2 - 50 \cdot x + 24$
v) $x^3 + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$
vi) $2 \cdot x^4 - 3 \cdot x^3 - x^2 + 3 \cdot x - 1$

**8.8.** Zerlege in Linearfaktoren.

i) $x^2 - 3 \cdot x - 40$
ii) $6 \cdot x^2 - x - 1$
iii) $a^2 - 3 \cdot a \cdot b - 40 \cdot b^2$
iv) $6 \cdot a^2 - a \cdot b - b^2$

**8.9.** Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung?

i) $(x-2)\cdot(x-3) > 0$

ii) $x^2 + 1 > 2 \cdot x$

iii) $x^2 + 2 > 2 \cdot x$

iv) $x^3 + x > 2 \cdot x^2$

v) $x^4 + 4 \leq 5 \cdot x^2$

vi) $x^4 + x^2 + 2 \cdot x > 2 \cdot x^3 + 2.$

**8.10.** Wir wählen eine Zahl $a \in \,]0;4]$.
Betrachte die Funktion $f\,:\,[0;1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x \cdot (1-x)$.

(i) Erkläre, weshalb $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in [0;1]$.

(ii) Für welche $x \in [0;1]$ gilt $f(x) = x$?

(iii) Für welche $x \in [0;1]$ gilt $f(\,f(x)\,) = x$? Tipp: Zwei Lösungen kennst du schon.

**8.11.** Löse das Gleichungssystem über $\mathbb{R}$.

i) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \cdot x - 6 \cdot y - 37 = 0 \\ 3 \cdot x - y = 13 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 4 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2 = 88 \\ 2 \cdot x - 3 \cdot y = 4 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2 \cdot x + 4 \cdot y - 80 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12 \cdot x - 24 \cdot y + 130 = 0 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} 3 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 192 \\ 9 \cdot x^2 - 4 \cdot y^2 = 405 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 2 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 308 \\ x - 3 \cdot y^2 = 0 \end{cases}$

vi) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 128 \\ x^2 + y^2 - 16 \cdot x + 32 = 0 \end{cases}$

vii) $\begin{cases} x - y + \sqrt{x-y} = 6 \\ x^3 - y^3 = 19 \end{cases}$

viii) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 8 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 34 \end{cases}$

ix) $\begin{cases} \sqrt{\frac{5\cdot x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{5\cdot x}} = 2 \\ x \cdot y - (x+y) = 6 \end{cases}$

x) $\begin{cases} x + y + x \cdot y = 3 \\ x^2 + y^2 + x \cdot y = 39 \end{cases}$

**8.12.** Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Erkläre:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2 \cdot x \cdot y = 4. \end{cases} \iff (x + y \cdot i)^2 = -3 + 4 \cdot i.$$

**8.13.** Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{C}$.

i) $z^2 = 1$ ii) $z^2 = -i$ iii) $z^2 = -1$ iv) $z^2 = -3 + 4 \cdot i$ v) $z^2 = 5 - 12 \cdot i$ vi) $z^2 = -8 + 6 \cdot i$

**8.14** (Komplexe Wurzeln ziehen). Sei $w \in \mathbb{C}$. Zeige, dass die Gleichung

$$z^2 = w$$

immer eine Lösung über der Grundmenge $\mathbb{C}$ hat. Wie viele Lösungen hat die Gleichung?

Tipp: Schreibe $w = a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und suche nach $x, y \in R$ mit $x^2 - y^2 = a$ und $2 \cdot x \cdot y = b$.

## 9. Aufgaben zu den trigonometrischen Funktionen

Damit die trigonometrischen Funktionen beim Studienbeginn nicht ganz unter den Tisch fallen, haben wir in diesem Abschnitt einige Leckerbissen vor allem rund um die Additionstheoreme zusammen gestellt.

**9.1.** Wie sind die Werte der Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens für einen spitzen Winkel als Seitenverhältnisse im rechtwinkeligen Dreieck festgelegt? Verwende geeignete Dreiecke, um die Werte von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ in den folgenden Fällen zu berechnen:

i) $\alpha = \pi/6$
ii) $\alpha = \pi/4$
iii) $\alpha = \pi/3$
iv) $\alpha = \pi/8$ und $\alpha = \pi/12$.

Tipp: Bei der letzten Teilaufgabe kann man sich mit einem gleichschenkeligen Dreieck mit Öffnungswinkel $2 \cdot \alpha$ und Schenkeln der Länge 1 helfen. Wie kann man sich die Höhe auf die Basis und die halbe Länge der Basis dieses Dreiecks ausrechnen, wenn $\cos(2 \cdot \alpha)$ und $\sin(2 \cdot \alpha)$ bekannt sind?

**9.2.** Von einem spitzen Winkel $\alpha$ weiß man, dass $\tan(\alpha) = 3/4$. Wie groß sind $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$?

**9.3.** Durch den Eckpunkt eines Würfels laufen drei Seitendiagonalen und eine Raumdiagonale. In welchen Winkeln schneiden sich je zwei dieser Diagonalen? Hinweis: Hier ist der Taschenrechner erlaubt.

**9.4.** Berechne das Volumen und die Oberfläche einer dreiseitigen Pyramide, in der alle Seitenkanten die Länge $a$ haben. Was sind Sinus, Cosinus und Tangens des Winkels, in dem die Seitenflächen einander treffen? Hinweis: So eine Pyramide heißt dann Tetraeder.

**9.5.** Berechne das Volumen und die Oberfläche einer quadratischen Pyramide, bei der alle Seitenkanten Länge $a$ haben. In welchem Winkel treffen die Seitenflächen einander? In welchem Winkel stehen die Seitenflächen auf die Basis? Hinweis: Hier ist der Taschenrechner erlaubt.

**9.6.** Ordne jeweils der Größe nach.

i) $\sin\left(\frac{7 \cdot \pi}{27}\right)$, $\cos\left(\frac{7 \cdot \pi}{27}\right)$, $\tan\left(\frac{7 \cdot \pi}{27}\right)$ — Tipp: Skizziere die Werte im Einheitskreis.

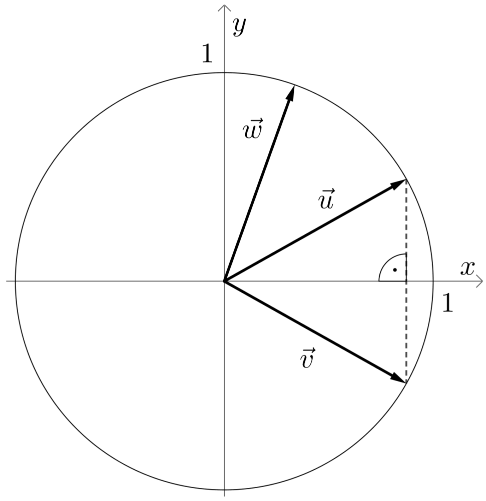
ii) $\pi$, $\frac{17}{2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{17}\right)$, $17 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{17}\right)$ — Tipp: Regelmäßige Vielecke im Einheitskreis und um ihn herum

iii) $x$, $\sin(x)$, $\tan(x)$ wobei $0 < x < \frac{1}{2} \cdot \pi$ Tipp: Vergleiche Flächen am Einheitskreis. Zeige damit, dass $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

**9.7** (Additionstheorem für den Cosinus)**.** ☆ Die Winkel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind gegeben. Damit bilden wir die drei Vektoren

$$\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{smallmatrix}\right), \quad \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix}\cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \vec{w} = \left(\begin{smallmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{smallmatrix}\right).$$

Rechts sind drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ mit $0 < \alpha, \beta < \pi/2$ im Einheitskreis dargestellt.




Welchen Winkel schließen die drei Vektoren jeweils mit der positiven $x$-Achse ein?

Wie lang sind die Vektoren jeweils?

Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ein?

Erinnere, wie der Cosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren mithilfe des Skalarprodukts berechnet werden kann. Erkläre so, weshalb

$$\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta).}$$

Der in Aufgabe 9.7 hergestellte Zusammenhang beruht letztlich auf dem Cosinussatz im Dreieck mit den Eckpunkten $(\cos\alpha \mid -\sin\alpha)$, $(0 \mid 0)$, $(\cos\beta \mid \sin\beta)$. In der Fachliteratur hören solche Identitäten auf den Namen *Additionsheorem* oder auch *Summensatz*. Die Standardpalette solcher Identitäten für die trigonometrischen Funktionen lautet

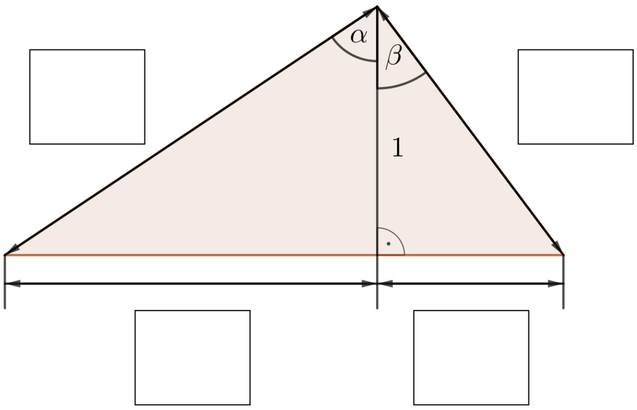
$$\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)} \tag{1}$$
$$\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)} \tag{2}$$
$$\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)} \tag{3}$$
$$\boldsymbol{\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha).} \tag{4}$$

Sie gelten alle für beliebige Winkel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**9.8.** ☆ Erkläre, wie die Formeln (2)–(4) aus Formel (1) folgen.

Tipp: Ersetze $\beta$ durch $-\beta$ beziehungsweise durch $\pi/2 + \beta$ in (1).

**9.9** (Additionstheorem für spitze Winkel)**.** Vom dargestellten Dreieck mit Höhe 1 kennst du die eingezeichneten Winkel $\alpha$ und $\beta$.




i) Wie kannst du mit $\alpha$ und $\beta$ die vier eingezeichneten Streckenlängen berechnen?
ii) Berechne den Flächeninhalt des großen Dreiecks auf zwei verschiedene Arten.
iii) Begründe damit das Additionstheorem

$$\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)}$$

für spitze Winkel $\alpha$ und $\beta$.

**9.10** (Doppelwinkelformel)**.** ☆ Zeige, dass

$$\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \cos(2 \cdot \alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

**9.11** (Halbwinkelformel)**.** ☆ Zeige, dass

$$\sin^2(\gamma/2) = \frac{1 - \cos(\gamma)}{2} \qquad \text{und} \qquad \cos^2(\gamma/2) = \frac{1 + \cos(\gamma)}{2}.$$

Verwende diese Formeln, um $\sin(\pi/12)$ und $\cos(\pi/12)$ exakt zu berechnen.

**9.12.** ☆ Zeige, dass $\sin(5 \cdot \alpha) = [16 \cdot \sin^4(\alpha) - 20 \cdot \sin^2(\alpha) + 5] \cdot \sin(\alpha)$.
Verwende diese Identität um zu zeigen, dass

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}.$$

**9.13.** ☆ Dem Einheitskreis wird ein regelmäßiges Fünfeck eingeschrieben.

(i) Zeige, dass die Seitenlänge dieses Fünfecks

$$s = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

beträgt. Tipp: Eine frühere Aufgabe ist hier nützlich.

(ii) Unter diesem Link findest du ein Video, in dem die Konstruktion mit Zirkel und Lineal eines regelmäßigen Fünfecks im Einheitskreis erklärt wird. Rechne nach, dass diese Konstruktion zur selben Seitenlänge $s$ führt.

(iii) Konstruiere mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges Fünfeck mit Seitenlänge 3 cm.

**9.14** (Multiplikation in der Gaußschen Zahlenebene). ☆

Die Winkel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind gegeben. Erkläre, weshalb

$$\Big(\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot i\Big) \cdot \Big(\cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot i\Big) = \cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cdot i$$

und

$$\frac{1}{\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot i} = \cos(-\alpha) + \sin(-\alpha) \cdot i.$$

Veranschauliche diese beiden Zusammenhänge in der Gaußschen Zahlenebene mit Beispielen wo $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$. Lass dir das auf der Zunge zergehen. Verwende diese Zusammenhänge, um

$$\left[\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{99}\right) + \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{99}\right) \cdot i\right]^{33} \qquad \text{und} \qquad (1 - \sqrt{3} \cdot i)^{-100}$$

zu berechnen.

Tipp: $1 - \sqrt{3} \cdot i = 2 \cdot \Big(\cos(\frac{5 \cdot \pi}{3}) + \sin(\frac{5 \cdot \pi}{3}) \cdot i\Big)$.

## Literatur

[1] Rosenberg: *Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra*. 16. Auflage. Hölder-Pichler-Tempsky A.G., 1937. – Verfügbar auf: http://phaidra.univie.ac.at/o:560369