TERMRECHNEN & GLEICHUNGEN

Die Schulbücher von Dr. Karl Rosenberg (1861-1936) wurden, in überarbeiteter Form, bis in die sechziger Jahre in Österreich verwendet. Damit wir uns bitte richtig verstehen: das war auch vor meiner Zeit. Ich erlebe nicht selten, wie KollegInnen die Augen nass werden, wenn sie „einen Rosenberg“ sehen.

Ich habe eine engagierte Gruppe angehender Mathematik-LehrerInnen gebeten, sich vorzustellen, dass sie eine Oberstufen-Klasse übernehmen, in der tatsächlich alle SchülerInnen ganz MINT-vernarrt sind. Dabei sind vielleicht nicht alle M-vernarrt, aber interessiert und bemüht, weil Mathematik doch für jedes INT-Studien bedeutsam sein soll. Die angehenden LehrerInnen sollten aus Rosenbergs gemeinfrei gewordenem Buch [1] all jene Übungen zusammen suchen, auf die sie beim Unterrichten dieser Klasse auf keinen Fall verzichten wollen würden, damit den SchülerInnen später bestimmt nichts fehlt. Mit ein paar Ergänzungen hie und da ist dann diese Sammlung hier entstanden.

Dass viele dieser Aufgaben aus dem österreichischen Matura-Kanon verschwunden sind, liegt wohl daran, dass wir für sie beim besten Willen keinen Kontext finden, der nicht ganz an den Haaren herbei gezogen ist. Sie sind wirklich als Rechenübungen konstruiert.

Wir erleben oder bilden uns zumindest ein, dass StudienanfängerInnen immer weniger Rechenfertigkeit aus der Schule an die Universität mitbringen. In einer Prüfung soll die ansprechende Summenformel

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

mit *vollständiger Induktion* (tolle Sache übrigens) bewiesen werden. Dabei ist es wichtig, den Term $(n+1)^3$ effizient auszumultiplizieren. Genau daran scheitern dann viele. Die Herausforderung bei dieser Frage ist allerdings an einer anderen Stelle gedacht, an der auch kein Taschenrechner helfen könnte.

Einige der Aufgaben hier sind bestimmt zuviel des Guten. Wir hoffen trotzdem, dass Sie sich vom Rosenberg zum Rechnen hinreißen lassen! Wir wünschen Ihnen viel Freude dabei und freuen uns, Sie ein Stück weit zu begleiten.

Das Buch [1] von Karl Rosenberg haben wir für Sie digitalisieren lassen. Sie können es bequem online abrufen. Es enthält viele weitere Aufgaben und, ganz hinten, auch ihre die Ergebnisse.

Datum: 24. September 2017.

.

1. Potenzen und Wurzeln

1.1. Vereinfache so weit wie möglich. [1, 119,124,142,143,144b,144d,176,186]

i) $(2a^5b^3) \cdot (-3a^2b^3) \cdot (-4ab^5)$

ii) $[(6a^4 - 5a^3 + 4a^2 - 3a + 2) \cdot (-3a^3)] \cdot [-2a^5]$

iii) $(x+1)^2 - (x-1)^2$

iv) $(x+y)^3 - (x-y)^3$

v) $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

vi) $(m^6 + 3m^3 - 1)(m^6 - 3m^3 + 1)$

vii) $[(-81a^8b^6x^{10}) : (+3a^2bx^4)] : (-9a^5b^4x^5)]$

viii) $(8x^7y^3 - 8x^3y^7 + 15xy^9) : (2x^3y + 3xy^3)$

1.2. Vereinfache so weit wie möglich. [1, 1667–1669,1674,1704–1705]

i) $m^{3-x} \cdot m^{x-1}$

ii) $(-3 \cdot a^{3-x} \cdot b^{2x-5} \cdot c^{4-3x}) \cdot \left(-5 \cdot a^{x-2} \cdot b^{6-2x} \cdot c^{3\cdot(x-1)}\right)$

iii) $\dfrac{12 \cdot (x-y)^6}{3 \cdot (x-y)^2}$

iv) $\dfrac{8 \cdot a^2 \cdot b}{3 \cdot c^3} \cdot \dfrac{6 \cdot a^2 \cdot c^3}{4 \cdot b^4} \cdot \dfrac{5 \cdot b^4 \cdot c}{a^3}$

v) $(5a^{-2}bx^{-3}y^4)^{-2} \cdot (5a^{-1}bx^{-2}y^3)^3$

vi) $\left[\dfrac{5a^{-3}}{b^4}\right]^{-3} \cdot \left[\dfrac{a^2b^3}{5}\right]^{-4}$

1.3. Schaffst du die folgenden Rechnungen auch ohne Taschenrechner? [1, 1679–1680,1683b,1690a]

i) $4^4 \cdot 25^4$

ii) $8^3 \cdot 5^3$

iii) $125^3 \cdot 25^4 \cdot 4^9$

iv) $\dfrac{28^3 \cdot 45^4}{36^4 \cdot 35^3}$

1.4. Erkläre die folgenden Gleichungen: [1, 1699]

i) $(-1)^{2m} = 1$ ii) $(-a)^{2m} = a^{2m}$ iii) $(-1)^{2m+1} = -1$ iv) $(-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}$

1.5. Schaffst du die folgenden Rechnungen auch ohne Taschenrechner? [1, 1707,1709,1819–1820,2057,2057a]

i) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-6} \cdot \left\{[(0{,}75)^{-2}]^3 : \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right]^{-2}\right\} : [2^3 : 2^{-5}]$

ii) $\left\{\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-2}\right\}^{-3}$

iii) $\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}} + \sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)^2$

iv) $\left(\sqrt{5+\sqrt{3}} - \sqrt{5-\sqrt{3}}\right)^2$

v) $\left\{\left[(0{,}2)^{-1}\right]^{-3}\right\}^{-1} \cdot \left\{\left[(-5)^{-2}\right]^{-1}\right\}^{-1}$

vi) $\left[(-3)^{-1}\right]^3 \cdot \left\{[(-2)^{-1}]^{-2}\right\}^2 \cdot \left\{\left[(5)^{-1}\right]^{-3}\right\}^{-1} \cdot (-15)^3$

1.6. Vereinfache so weit wie möglich. [1, 1675–1676,1688]

i) $(x^{3m-n} + x^{2m} + x^{4m-2n}) \cdot (x^m - x^n)$

ii) $\left(\dfrac{x^m}{y^{n+2}} + \dfrac{x^{m+2}}{y^{n+1}} - \dfrac{x^{m+4}}{y^n}\right) \cdot \dfrac{y^n}{x^m}$

iii) $(x+y)^2 \cdot (x-y)^2 \cdot (x^2+y^2)^2$

1.7. Vereinfache so weit wie möglich. [1, 1868,2059]

i) $\dfrac{\left[3 \cdot (6a^2b^3)^2\right]^{-1}}{\left[2 \cdot (6ab^2)^{-2}\right]^2}$

ii) $\sqrt[24]{\left\{-\left[(-3ab^{-1})^{-2}\right]^{-3}\right\}^{-4}}$

1.8. Stelle den Bruch mit einem rationalen Nenner dar. [1, 1871,1875,1877,1879]

i) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

ii) $\dfrac{1}{4-\sqrt{5}}$

iii) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

iv) $\dfrac{3\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

v) $\dfrac{30}{3-2\sqrt{6}+\sqrt{15}}$

vi) $\dfrac{30}{2\cdot\sqrt{30}-3\cdot\sqrt{5}+5\cdot\sqrt{3}}$

1.9. Multipliziere, möglichst mit System, die folgenden Terme aus.

i) $(x+1)\cdot(x-1)$

ii) $(x^2+x+1)\cdot(x-1)$

iii) $(x^3+x^2+x+1)\cdot(x-1)$

iv) $(x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1)\cdot(x-1)$ Das gibt die geometrische Summenformel.

v) $(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

1.10. Berechne $(2\cdot 3)\cdot 4$ und $2\cdot(3\cdot 4)$ und vergleiche. Berechne nun $(2\div 3)\div 4$ und $2\div(3\div 4)$.

Die Schreibweise $2\cdot 3\cdot 4$ ist unbedenklich — wir können nämlich rechnen, wie wir wollen. Der Ausdruck $2\div 3\div 4$ ist brandgefährlich.

2. Lineare & quadratische Gleichungen, Gleichungssysteme

2.1. Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungen. [1, 231e,232d,248,296a,1200]

i) $3(x^2-2x+5)-(3x+4)x = 11(2-x)$.

ii) $(x^2+2x-7)(x-9) = x^3-7x^2-62$.

iii) $(x-3)(x-5)(x-7)(x-9)-[x^4-24x^3+206x^2-(144x+6255)]=0.$

iv) $[(5x^2+3x+1)^2-(3x^2+6x-4)^2]:(2x^2-3x+5)=8x^2+7x-1.$

v) $\left(x+\frac{1}{16}\right)\left(x-\frac{1}{16}\right)=0.$

2.2. Löse die Gleichungen mit quadratischer Ergänzung: [1, 2170]

i) $x^2-8x+15=0.$ ii) $x^2-11x+28=0.$ iii) $x^2+3x-28=0.$ iv) $x^2-3x-28=0.$

2.3. Löse die quadratischen Gleichungen: [1, 2155,2157,2161,2172,2175,2177,2195,2196,2203,2212]

i) $(x+4)^2-(x+3)^2=(x+1)^2-43.$

ii) $(8+x)^2+(8-x)^2=146.$

iii) $\frac{24}{x^2}-\frac{5x-7}{x}=2+\frac{7-x}{x}.$

iv) $x^2-5x-24=0.$

v) $x^2+6x-135=0.$

vi) $15x^2-x-2=0.$

vii) $(x+3)\cdot(x-2)-x^2=(5-x)\cdot(x+2)+32.$

viii) $(x-8)\cdot(3x-20)=63-(3x-17)\cdot(2x-7).$

ix) $(7-x)^3+(x-4)^3=27.$

x) $\frac{3-x}{x-2}+\frac{x-2}{3-x}=\frac{13}{6}.$

2.4. Löse die Gleichungen durch geschicktes Herausheben: [1, 2254,2262–2263]

i) $3\cdot(x^2+5x-8)=(x^2+5x)\cdot(x^2+5x+13).$

ii) $8(x-3)x=x^3-3x^2+9(3-x).$

iii) $x^3-5x^2+(x-5)^2+3x\cdot(x-5)=0.$

2.5. Löse die Gleichungen durch eine geschickte Substitution: [1, 2265,2267,2272]

i) $x^4-41x^2+400=0.$

ii) $\left(16x^2\right)^2-34\cdot(4x)^2+225=0.$

iii) $x^8-97x^4+1296=0.$

2.6. Löse die folgenden Gleichungssysteme. [1, 822,2342,2345]

i) $\frac{x+3}{y-1}=6,\quad \frac{y+2}{z-1}=2,\quad \frac{z+1}{x-1}=2.$

ii) $x^2 + y^2 = 58, \quad x + y = 10.$

iii) $16x^2 + 9y^2 = 3600, \quad 9x^2 + 16y^2 = 3600.$

2.7. Rechne nach, dass $a^2 + b^2 = c^2$ ist, wenn

$$a = n^2 - m^2, \quad b = 2 \cdot m \cdot n \quad \text{und} \quad c = n^2 + m^2.$$

Diese Aufgabe erinnert nicht zufällig an den Satz des Pythagoras.

2.8. Multipliziere den Ausdruck $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ aus und vereinfache, wobei

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

3. Bruchterme und Bruchgleichungen

3.1. Schreibe mit einem gemeinsamen Bruch an. [1, 363h,379–380,386–387,391,393,398 ✩]

i) $x^2 - y^2 - \dfrac{x^4 - 2x^2y^2 - y^4}{x^2 + y^2}$

ii) $\dfrac{2a}{3} + \dfrac{3a}{15} + \dfrac{3a}{5} + \dfrac{7a}{10} + \dfrac{5a}{6}$

iii) $\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{x+4}{2} + \dfrac{5x+2}{6}$

iv) $\dfrac{2x-3y}{5} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{3x-7y}{10} + \dfrac{x+y}{2}$

v) $\dfrac{1+a^2}{1-a^2} - \dfrac{1-a}{1+a}$

vi) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{x}{3y} + \dfrac{y-3x}{5x} - \dfrac{5x+3y}{15y} - \dfrac{3y-2x}{15x}$

vii) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{2x^2+y^2}{xy} + \dfrac{3xy^2 - 3x^3 - y^3}{x^2y} - \dfrac{4xy^3 - 2x^2y^2 - y^4}{x^2y^2}$

viii) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b} - \dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b} + \dfrac{2b^3 - b^2 + a^2}{a^2 - b^2}$

3.2. Schreibe mit einem gemeinsamen Bruch an. [1, 419,423–424,430–431]

i) $\left(\dfrac{a^3}{3b^6} - \dfrac{2a^2}{b^5} + \dfrac{3a}{2b^4} - \dfrac{7}{b^3}\right) \cdot 3b^6$

ii) $\left(\dfrac{2}{7x} - \dfrac{2}{m+n} \cdot \left[\dfrac{m+n}{7x} - (m+n)\right]\right)$

iii) $\left[\dfrac{3}{m-5} - \dfrac{3}{m+5} - \dfrac{29}{m^2-25}\right] \cdot (m+5) \cdot (m-5)$

iv) $\left(\dfrac{x^8}{81} - \dfrac{16}{x^4}\right) : \left(\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2}{x}\right)$

v) $\left(\dfrac{8x^9}{y^6} + \dfrac{x^3}{27y^{15}}\right) : \left(\dfrac{2x^3}{y^2} + \dfrac{x}{3y^5}\right)$

3.3. Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungen. [1, 458,464,469,486,490,497,512,1212]

i) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} = 65.$

ii) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{6} + \dfrac{x}{8} - \dfrac{x}{10} = \dfrac{x}{12} + 7.$

iii) $\dfrac{x+3}{2} + \dfrac{2x-1}{3} = x + 2.$

iv) $\dfrac{13x-24}{3x} - \dfrac{37}{20} + \dfrac{10}{x} = \dfrac{13}{5x} + \dfrac{7}{3}.$

v) $\dfrac{x-1}{2x-1} - \dfrac{2x-3}{6x-3} + \dfrac{3x+6}{10x-5} = \dfrac{5x+1}{8x-4}.$

vi) $\dfrac{x-3}{x-2} = \dfrac{x+1}{x+3}.$

vii) $\dfrac{6}{x-1} = \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x-2}.$

viii) $\dfrac{x+5}{x-5} + \dfrac{x-5}{x+5} = \dfrac{100}{x^2-25}.$

4. Verhältnisse

4.1. Welche Zahlen x, y und z lösen beide folgenden Gleichungen? [1, 812]

$$x + y + z = 30, \quad x : y : z = 4 : 5 : 6.$$

4.2. Löse die folgenden Proportionen nach x auf, und mache dann die Probe. [1, 968a,969b,969d]

i) $\frac{4}{x} : \frac{5}{6} = \frac{4}{5} : \frac{2}{3}$.

ii) $\frac{m+n}{m-n} : \frac{m^2-n^2}{mn} = x : \frac{(m-n)^2}{mn}$.

iii) $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b} + ab\right) : \left(\frac{a^3+b^3}{a+b} - ab\right) = (a+b)^2 : x$.

4.3. Folgende Verhältnisse sind in den kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken: [1, 940b,1074a,1075b]

i) $\left(26 + \frac{3}{7}\right) : \left(98 + \frac{2}{3}\right)$. ii) $\left(27 + \frac{1}{2}\right) : \left(15 + \frac{3}{5}\right)$. iii) $0{,}275 : 3{,}5$.

5. Logarithmen

5.1. Man ermittle zur Basis 2 die Logarithmen von: [1, 2368]

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

5.2. Zerlege die Logarithmen so weit wie möglich. [1, 2381–2384,2386–2387]

i) $\lg\left(\frac{x^5y^7}{z^3}\right)$

ii) $\lg\left(\sqrt{a^3b^5}\right)$

iii) $\lg\left(\sqrt[3]{\frac{a^2b^7}{c^5}}\right)$

iv) $\lg\left(\frac{a^5 \cdot \sqrt[3]{b^5c^4}}{\sqrt[4]{a^7}}\right)$

v) $\lg\left(\sqrt[m]{\frac{ab^2c^5}{\sqrt[n]{d}}}\right)$

vi) $\lg\left(\sqrt[5]{ab} \cdot \sqrt[3]{c^4} \cdot \sqrt{d-e}\right)$

5.3. Gib jene algebraischen Ausdrücke an, die durch Logarithmierung die in den nachfolgenden Aufgaben mit x bezeichneten Werte ergeben: [1, 2389,2391,2393]

i) $x = 3 \cdot \lg a + 4 \cdot \lg b$. ii) $x = 3 \cdot \lg a + 7 \cdot \lg b - 5 \cdot \lg c$. iii) $x = \frac{1}{3} \cdot \lg a + \frac{1}{5} \cdot \lg b - \frac{1}{2} \cdot \lg c$.

6. Exponential- und Logarithmusgleichungen

6.1. Löse die folgenden Exponential- und Logarithmusgleichungen. [1, 2423–2434,2437,2440 ✪,2251–2252 ✪]

i) $\frac{5^x}{2{,}5} = \frac{2^x}{6^{x-1}}$.

ii) $\sqrt{5^{8-\frac{1}{x}}} = \sqrt[3]{8^{5+\frac{1}{x}}}$.

iii) $5^x \cdot 2^y = 2000, \quad y = x + 1$.

iv) $3^x \cdot 2^y = 2592, \quad 2^x \cdot 3^y = 3888$.

v) $\lg(x-11) + \lg(x-12) = \lg(2)$.

vi) $\lg(11x-16) = \lg(42) - \lg(3x+1)$.

vii) $\lg(x+4) + \lg(x+5) = \lg(x+2) + \lg(x+4) + \lg(2)$.

viii) $\lg\left((7x-9)^2\right) + \lg\left((3x-4)^2\right) = 2$.

ix) $\frac{\lg(2x)}{\lg(4x-15)} = 2$.

x) $\lg^2(x) - 4 \cdot \lg(x) - 5 = 0$.

xi) $\frac{1}{5-\lg(x)} + \frac{2}{1+\lg(x)} = 1$.

xii) $x^{\lg(x)} = 10\,000$.

xiii) $x^{3-\lg(x)} = 100$.

xiv) $\left(\frac{x}{3}\right)^{3+\lg(x)} = 30\,000$.

xv) $\left(9^{4-5x}\right)^x = 3^{x+1}$.

xvi) $\left(5^{3x+1}\right)^{x-1} = \left(25^{x+2}\right)^{5x-13}$.

7. Wurzelgleichungen

7.1. Ermittle die Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichungen.

[1, 1954–1956,1971,1976,1978,2018 ✪,2249–2250 ✪]

i) $\sqrt{3x-1} = \sqrt{5x-7}$.

ii) $3 \cdot \sqrt{x} - 1 = 5 \cdot \sqrt{x} - 7$.

iii) $2 + \sqrt{x^2 - 3x - 3} = x$.

iv) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

v) $\frac{\sqrt{14+x} + \sqrt{2+x}}{\sqrt{14+x} - \sqrt{2+x}} = 3$.

vi) $\sqrt{28 - 3 \cdot \sqrt{3x+7}} = 4$.

vii) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+7} = \sqrt{x+34} - \sqrt{x+2}$.

viii) $\sqrt{\frac{3x-4}{x-2}} + \sqrt{\frac{x-2}{3x-4}} = \sqrt{\frac{16x+11}{3x}}$.

ix) $\sqrt[3]{72-x} - \sqrt[3]{16-x} = 2$.

Literatur

[1] ROSENBERG: *Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra*. 16. Auflage. Hölder-Pichler-Tempsky A.G., 1937. – Verfügbar auf: http://phaidra.univie.ac.at/o:560369